



ANÁLISE LONGITUDINAL DE TABULEIROS EM CAIXÃO MISTOS AÇO-BETÃO: COMPARAÇÃO ENTRE AS FORMULAÇÕES CLÁSSI- CAS E A TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS

Luís Vieira^a, José Oliveira Pedro^{a,b}, Rodrigo Gonçalves^c

^a CERIS, ICIST, DECivil, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

^b GRID INTERNATIONAL

^c CERIS, ICIST, DEC, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Resumo. Descrevem-se e comparam-se dois métodos de análise longitudinal de tabuleiros de pontes em caixão mistos aço-betão que permitem identificar as contribuições dos principais modos de deformação: flexão, torção, distorção e *shear lag*. O primeiro método engloba as teorias clássicas de barras à flexão e à torção com empenamento, a analogia de viga em fundação elástica para análise da distorção e uma metodologia semi-empírica para consideração do *shear lag*. O segundo método baseia-se na Teoria Generalizada de Vigas. São estabelecidas comparações ao nível das formulações e dos resultados obtidos para dois casos de estudo. Avalia-se a importância dos diafragmas de vão e os efeitos das configurações das sobrecargas.

1. Introdução

Com o objetivo de reduzir os custos dos tabuleiros mistos aço-betão em caixão, têm vindo a ser adotadas secções transversais com paredes mais esbeltas e, conseqüentemente, mais deformáveis [1]. Em consequência, os efeitos da deformabilidade no plano e para fora deste (empenamento) têm-se tornado mais significativos no dimensionamento deste tipo de tabuleiros, tornando o estudo da distorção e da torção com empenamento um assunto de grande interesse do ponto de vista prático. Contudo, é também um problema algo complexo, pelo que é usual recorrer a análises com modelos de elementos finitos de casca, computacionalmente exigentes e que não permitem quantificar claramente a importância destes efeitos.

Este artigo aborda dois métodos alternativos que permitem quantificar os principais tipos de deformação em tabuleiros em caixão mistos aço-betão: flexão, torção com empenamento, distorção e *shear lag*. O primeiro método utiliza as abordagens clássicas para a definição das equações de equilíbrio longitudinais da flexão, torção com empenamento [2] e distorção [3,4], sendo daqui em diante designado por “Formulações clássicas”. Compreende ainda uma metodologia simplificada, preconizada na BS 5400 Parte 3 [5], para a determinação da distribuição não-linear de tensões provocada pelo efeito de *shear lag*. O segundo método corresponde à Teoria Generalizada de Vigas (GBT), uma formulação emergente aplicável à análise estrutural de barras prismáticas de parede fina. Esta teoria tem demonstrado resultados bastante promissores,

incluindo para o caso de tabuleiros em caixão [6], mas tem sido pouco utilizada na prática de projeto.

Apresentam-se estes dois métodos no contexto da análise de tabuleiros de pontes em caixão, particularizando-os para a obtenção das tensões normais longitudinais resultantes da flexão, torção, distorção e *shear lag*. Avalia-se com base na GBT o efeito dos diafragmas de vão dos tabuleiros mistos em caixão mistas aço-betão com diafragmas intermédios, cuja relevância na redução das tensões de torção e de distorção é bem conhecida, mas normalmente difícil de quantificar.

2. Formulações Clássicas

A análise longitudinal de pontes em caixão pode ser efetuada pelas abordagens clássicas para a flexão, a torção e a distorção. De acordo com [1,4], o procedimento de análise de uma ponte em caixão de parede fina sujeita a cargas verticais genéricas pode ser obtido pela sobreposição das seguintes sub-análises (ver Fig. 1):

- 1) Análise longitudinal da viga assumindo secção transversal indeformável – obtendo as distribuições de momentos fletores e torsões ao longo do eixo, assim como as tensões de flexão, tendo eventualmente em conta o efeito de *shear lag*.
- 2) Análise transversal:
 - 2.1) Análise do banzo superior considerando-o encastrado nos nós de ligação banzo-alma (ver Fig.1-a1). As cargas verticais são substituídas por forças (p) e momentos (m) de fixação, aplicados nos nós de ligação alma-banzo superior.
 - 2.2) Análise de um segmento longitudinal de tabuleiro como se de um pórtico se tratasse, sujeito às forças excêntricas (m_A, p_A) e (m_B, p_B) (ver Fig.1-a2):
 - 2.2.1) Divisão do carregamento nas parcelas simétrica e antissimétrica (ver Figs. 1-b1 e 1-b2); a parcela simétrica produz tensões de flexão e *shear lag* já contabilizados em 1).
 - 2.2.2) Divisão da parcela antissimétrica do carregamento nos subsistemas torsional (ver Fig. 1-c1) e distorcional (ver Fig. 1-c2). O efeito do bi-corte de torção na determinação das cargas de distorção é usualmente desprezado pois, por norma, o erro associado é reduzido [7], e permite grandes simplificações. Tomando esta hipótese como válida, as forças de torção são dadas por integração do fluxo de *Bredt* ao longo das paredes, e o sistema torsional passa a designar-se como de “torção pura”. As cargas de distorção podem ser determinadas por subtração de p_{TPura} às cargas nodais e resolvendo o sistema hiperestático [6].
 - 2.2.3) Finalmente, os efeitos do sistema distorcional podem ser avaliados analisando uma alma da secção em caixão considerando um modelo de uma viga em fundação elástica, correspondendo a rigidez da fundação à rigidez do “pórtico” à deformação transversal.

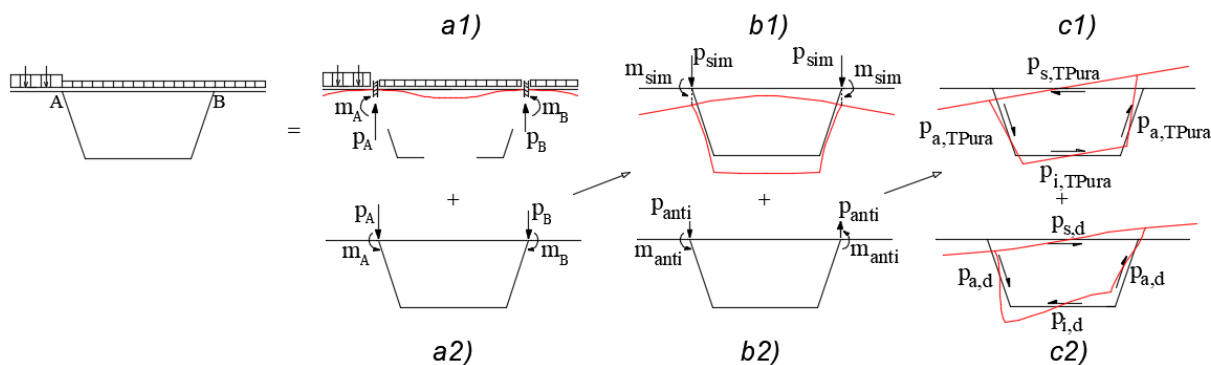


Fig. 1: Procedimento adotado para análise com as Formulações Clássicas

2.1 Flexão com *shear lag*

A equação de equilíbrio da flexão de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli é bem conhecida, assim como o diagrama de tensões longitudinais correspondente. Esta teoria despreza a deformabilidade por corte da secção, relevante no caso de banzos largos, pois conduz a uma modificação do diagrama de tensões longitudinais (efeito de *shear lag*).

Apesar de existirem soluções analíticas para a resolução do efeito de *shear lag* (ver por exemplo [8]), é prática comum recorrer a uma metodologia alternativa simplificada, baseada em coeficientes de largura efetiva. Para o presente artigo utilizam-se as larguras efetivas definidas na Parte 3 da BS 5400 [3].

2.2 Torção

Em cada secção transversal, o momento torsor T é equilibrado pela soma de dois efeitos: torção uniforme ou de Saint-Venant (T_{SV}), e torção não-uniforme (T_w), que gera bi-momento e bi-corte [9].

De acordo com a teoria da torção apresentada por [2], em que se contabiliza o efeito do bi-corte, os deslocamentos de empenamento u são independentes da rotação de corpo rígido no plano $\phi(x)$ e podem ser dados por

$$u(x,s) = -\tilde{u}_s(s) \frac{d\chi}{dx}, \quad (1)$$

onde \tilde{u}_s é uma coordenada sectorial normalizada que representa a “forma” dos deslocamentos de empenamento [1,9] e $\chi(x)$ é uma função que define a amplitude do modo.

A equação de equilíbrio para o comportamento longitudinal resulta igual a

$$\frac{EI_\omega}{\mu} \left(\frac{d^4\chi}{dx^4} \right) + GJ \left(\frac{d^2\chi}{dx^2} \right) = m_T(x), \quad \mu = 1 - \frac{J}{I_c}, \quad (2), (3)$$

em que E e G são os módulos de elasticidade e de distorção do material, I_ω é a constante de empenamento, J é a constante de torção de Saint-Venant e I_c o momento de 2ª ordem em relação ao centro de corte. O parâmetro de empenamento de torção μ serve como medida da esbelteza das paredes e da secção transversal e, por consequência, da importância do bi-corte. As soluções analíticas para esta equação de equilíbrio podem ser consultadas em [10].

As tensões longitudinais σ_w podem então ser calculadas através de

$$\sigma_w(x,s) = -E \tilde{u}_s(s) \frac{d^2\chi}{dx^2}. \quad (4)$$

2.3 Distorção

As cargas distorcionais a atuar no tabuleiro em caixão são equilibradas por intermédio de dois efeitos acoplados: flexão longitudinal das paredes da secção, relacionada com o carregamento p_d^L , e deformação transversal da secção no seu plano devido às cargas p_d^T .

As forças p_d^L são obtidas a partir da análise longitudinal simultânea das várias placas de um segmento de viga e garantindo a continuidade das tensões longitudinais, lineares em cada banzo, nos nós de ligação banzo-alma. A equação diferencial de equilíbrio que daqui resulta pode ser escrita em função do deslocamento da alma no plano Δ_a , na qual se considera uma inércia equivalente $I_{a,e}$ que engloba a influência das restantes placas:

$$p_{a,d}^L = \frac{d^4\Delta_a}{dx^4} EI_{a,e}. \quad (5)$$

Por sua vez, a relação entre as forças p_d^T e a deformação transversal da secção transversal associada é determinável através de uma análise do tipo pórtico. O deslocamento da alma no plano Δ_a relaciona-se com $p_{a,d}^T$ através de uma rigidez transversal equivalente k ,

$$p_{a,d}^T = k \Delta_a. \quad (6)$$

Somando os dois efeitos, é então possível determinar a equação de equilíbrio global para obter o efeito da distorção, resolúvel por analogia da viga sobre fundação elástica [11]. As expressões necessárias à determinação de $EI_{a,e}$ e k podem ser consultadas em [1,4].

$$p_{a,d} = \frac{d^4 \Delta_a}{dX^4} EI_{a,e} + k \Delta_a. \quad (7)$$

2.4 Homogeneização do tabuleiro misto aço-betão em caixão

As formulações apresentadas são válidas para secções homogéneas. Para o caso de um tabuleiro misto em caixão é necessário determinar uma secção transversal homogénea equivalente, usualmente em aço [8], definindo as espessuras t^H a utilizar nas várias sub-análises tendo em conta os fenómenos estruturais em causa (corte, flexão longitudinal ou flexão transversal). Assumindo que o betão se encontra não-fendilhado, as razões entre os módulos de elasticidade e de distorção do betão e do aço são aproximadamente iguais, pelo que as espessuras equivalentes dos banzos em betão são dadas em função do coeficiente de homogeneização n :

- Flexão com *shear lag*, torção e distorção (cálculo de $EI_{a,e}$):

$$t^H = t E_c / E_s = t / n \quad (8)$$

- Distorção (cálculo de k):

$$t^H = t / \sqrt[3]{n} \quad (9)$$

3. Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

A análise longitudinal de tabuleiros em caixão de parede fina pode ser executada através de um modelo de elementos finitos baseados na Teoria Generalizada de Vigas (GBT), a qual é capaz de capturar os fenómenos de flexão, torção, distorção e *shear lag* (entre outros).

Estes efeitos são incluídos na análise sob a forma de “modos de deformação”, com configurações pré-definidas, cujas amplitudes ao longo do eixo longitudinal constituem as incógnitas do problema. A definição destes modos em secções poligonais de forma arbitrária é objeto de discussão em vários trabalhos (ver por exemplo [12,13,14]).

3.1 Formulações fundamentais e definição do elemento finito

Para cada parede do elemento prismático, esta teoria emprega a hipótese de *Kirchhoff* para exprimir os deslocamentos U em função da combinação (i) dos deslocamentos modais da linha média segundo eixos locais x , y e z (agrupados nos vetores-coluna \bar{u}^t , \bar{v}^t e \bar{w}^t) (ii) e respectivas amplitudes, contidas no vetor-coluna Φ :

$$U(x,y,z) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{u}^t \\ \bar{v}^t & 0 \\ \bar{w}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi_{,x} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} 0 & \bar{w}^t \\ \bar{w}_{,y}^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi_{,x} \end{bmatrix} = \Xi_U \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi_{,x} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

O sistema de equações de equilíbrio da GBT é obtido através de um princípio variacional, como por exemplo o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Considerando simplificadamente

que as cargas $\mathbf{f}=[f_x f_y f_z]^t$ são aplicadas na superfície média das paredes Ω , e que o material é elástico linear, o sistema de equações de equilíbrio resulta:

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = - \int_L \begin{bmatrix} \delta \Phi \\ \delta \Phi_{,x} \\ \delta \Phi_{,xx} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \mathbf{D}_2 \\ 0 & \mathbf{D}_1 & 0 \\ \mathbf{D}_2^t & 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Phi \\ d\Phi_{,x} \\ d\Phi_{,xx} \end{bmatrix} dX + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta \Phi \\ \delta \Phi_{,x} \end{bmatrix}^t \Xi_U^t \mathbf{f} d\Omega = 0, \quad (11)$$

onde \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são matrizes modais da GBT (ver por exemplo [6]).

De forma a implementar um elemento finito, considera-se que as funções de amplitude Φ são aproximadas através de polinómios lineares e quadrático (hierárquico) de *Lagrange*, para os modos de empenamento, e de polinómios cúbicos de *Hermite* nos restantes casos. Montando a matriz de rigidez global e o vetor das forças equivalentes, é possível determinar o vetor das amplitudes nodais $\mathbf{d}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ e, de seguida, calcular as extensões e tensões longitudinais por diferenciação do campo de deslocamentos e aplicação das relações constitutivas.

3.2 Modos de deformação

Os modos de deformação empregados neste trabalho podem ser subdivididos em três famílias distintas (ver Fig. 2). A primeira consiste nos ditos “modos de *Vlasov*”, isto é, os modos em que se assume como válida a hipótese de distorção de membrana nula ($\gamma_{xy}^M = 0$). Inclui os modos de extensão axial, flexão em torno dos dois eixos principais e distorção.

A segunda família contém os modos relacionados com os fenómenos de corte para torção e distorção, nomeadamente o modo de torção clássica, e dois modos de empenamento de torção e distorção que permitem desacoplar os deslocamentos no plano e de empenamento, contabilizando a deformação por bi-corte de torção e distorção.

O último conjunto de modos contém modos de empenamento que permitem contabilizar o efeito do *shear lag* nos banzos, tanto simétrico como antissimétrico.

Importa salientar que os modos de deformação 1 a 5 são obtidos através do programa GBTUL (disponível em <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>), sendo que os modos 6 e 7 são definidos através dos deslocamentos de empenamento dos modos 5 e 4, respetivamente. Os restantes modos adicionais de *shear lag* são definidos analiticamente.

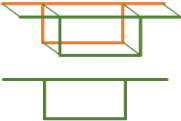
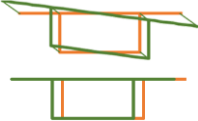
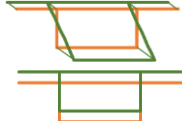


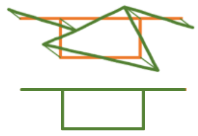
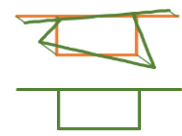

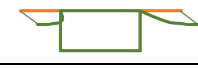

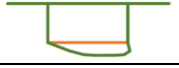




Vlasov	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
				
	Modo 5	Modo 6	Modo 7	
				
Shear lag	Modo 8 (quadrático)	Modo 9 (quártico)	Modo 10 (quártico)	Modo 11 (quártico)
				
	Modo 12 (quadrático)	Modo 13 (quártico)	Modo 14 (cúbico)	Modo 15 (cúbico)
				

Fig. 2: Modos de deformação GBT

4. Comparação entre as Formulações Clássicas e a GBT

Tanto na GBT como nas Formulações Clássicas, a função de amplitude de cada modo de deformação, variável ao longo do eixo longitudinal, é calculada através de equações de equilíbrio. Sendo assim, é possível identificar as diferenças entre as duas abordagens, comparando (i) a definição dos modos de deformação e (ii) as equações de equilíbrio.

4.1 Comparação dos modos de deformação

Cada modo de deformação é caracterizado pelos seus deslocamentos no plano e empenamento. No caso da flexão, ambas formulações assumem uma translação da secção no plano, que permanece normal ao eixo longitudinal (*Euler-Bernoulli*).

Quanto à torção com empenamento e bi-corte, as Formulações Clássicas consideram que os deslocamentos de empenamento e os deslocamentos de corpo rígido no plano estão desacoplados, ou seja, existem dois modos de deformação cujas funções de amplitude são χ e ϕ , respetivamente. O campo de deslocamentos é obtido pela combinação linear destes dois modos. Este é necessariamente igual ao que resulta da combinação dos modos 5 e 6 da GBT (ver Fig. 2), visto que os deslocamentos de empenamento destes modos coincidem com \bar{u}_s .

Nas Formulações Clássicas, a definição da distorção baseia-se na “soma” da flexão longitudinal das placas com o comportamento de pórtico transversal. Na primeira, a hipótese de *Vlasov* é assumida implicitamente, e na análise da deformação no plano resolve-se o sistema (“pórtico”) desprezando a extensão transversal das paredes. Estes são os mesmos pressupostos assumidos na GBT, implicando que o modo coincide em ambas as formulações.

No que se refere à deformação por *shear lag*, as Formulações Clássicas empregam um único modo de deformação global enquanto a GBT permite a consideração de um conjunto mais abrangente de modos. Evidentemente, tal deverá resultar numa maior precisão do segundo método, visto que o efeito da deformação por corte varia de forma diferente em cada parede.

4.2 Comparação das equações de equilíbrio

O sistema de equações de equilíbrio da GBT pode ser reescrito na forma diferencial:

$$\mathbf{C} \Phi_{,xxxx} - \mathbf{D} \Phi_{,xx} + \mathbf{B} \Phi = \mathbf{f}_{x,x} + \mathbf{f}_y + \mathbf{f}_z \quad ; \quad \mathbf{D} = (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_2^t) \quad (12), (13)$$

Considerando que as funções de amplitude para as equações de flexão, empenamento de torção, rotação de torção e distorção são dadas respetivamente em função do deslocamento vertical da secção Δ , da função de empenamento χ , da rotação da secção ϕ e do deslocamento da alma no plano Δ_a ($\Phi = [\Delta \chi \phi \Delta_a]^t$), as matrizes de rigidez da GBT tomam a seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{\Delta\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\chi\chi}^M & 0 & C_{\Delta_a\chi}^M \\ 0 & 0 & C_{\phi\phi}^F & C_{\Delta_a\phi}^F \\ 0 & C_{\chi\Delta_a}^M & C_{\phi\Delta_a}^F & C_{\Delta_a\Delta_a} \end{bmatrix} ; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{\chi\chi}^M & D_{\phi\chi}^M & 0 \\ 0 & D_{\chi\phi}^M & D_{\phi\phi} & D_{\Delta_a\phi}^F \\ 0 & 0 & D_{\phi\Delta_a}^F & D_{\Delta_a\Delta_a} \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{\Delta_a\Delta_a}^F \end{bmatrix} \quad (14)$$

Os expoentes “M” e “F” referem-se às parcelas exclusivamente de membrana ou de flexão, respetivamente. Reescrevendo o sistema de equações de equilíbrio das Formulações Clássicas no mesmo formato, é possível obter as matrizes de rigidez equivalentes:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} EI_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_{a,e} \end{bmatrix} ; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G(J - I_c) & G(J - I_c) & 0 \\ 0 & G(J - I_c) & GI_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (15)$$

Estabelecendo agora comparações entre os dois conjuntos de matrizes, pode concluir-se que as equações de torção e distorção da GBT estão acopladas devido a existência de termos não diagonais nas últimas três linhas do sistema de equações. Nas Formulações Clássicas, estes termos são nulos porque (i) vários destes coeficientes se referem a um efeito de flexão na parede, que é normalmente desprezado nas abordagens clássicas e (ii) na determinação de $p_{a,d}$ despreza-se o efeito do bi-corte de torção que provoca o desacoplamento de χ e ϕ . Sendo assim, ainda que os modos de deformação geralmente coincidam, as diferenças na definição das equações de equilíbrio conduzem a desvios nas tensões associadas à torção e à distorção.

A Formulação Clássica apresentada não utiliza as equações de equilíbrio do *shear lag*, pelo que não é possível estabelecer uma comparação com a GBT. Também não é possível fazê-lo em termos do bi-corte da distorção pelo facto de este não ser sequer considerado nas Formulações Clássicas, ainda que tenha relativa importância nos exemplos apresentados de seguida.

4.3 Análise de exemplos numéricos

4.3.1 Exemplo numérico 1

Este exemplo de teste corresponde a um tabuleiro em caixão de betão armado pré-esforçado (BAP), com um vão único de 30 m sujeito a uma carga concentrada excêntrica $Q = 1000$ kN a meio vão (ver Fig.3a). Existem diafragmas apenas nas secções de apoio.

Comparam-se nesta secção as tensões longitudinais na linha média através (i) das Formulações Clássicas, (ii) dum modelo de 30 elementos finitos da GBT de igual comprimento e (iii) de um modelo com 1800 elementos finitos de casca de 4 nós (MEF *shell*), executado no programa ADINA [15]. A Fig.3b apresenta as tensões longitudinais na secção de meio-vão e o andamento longitudinal dessas tensões na ligação banzo-alma carregada. Observa-se que os resultados da GBT mostram muito boa concordância com os resultados *shell*. Por sua vez, as Formulações Clássicas apresentam tensões semelhantes, mas com maiores desvios.

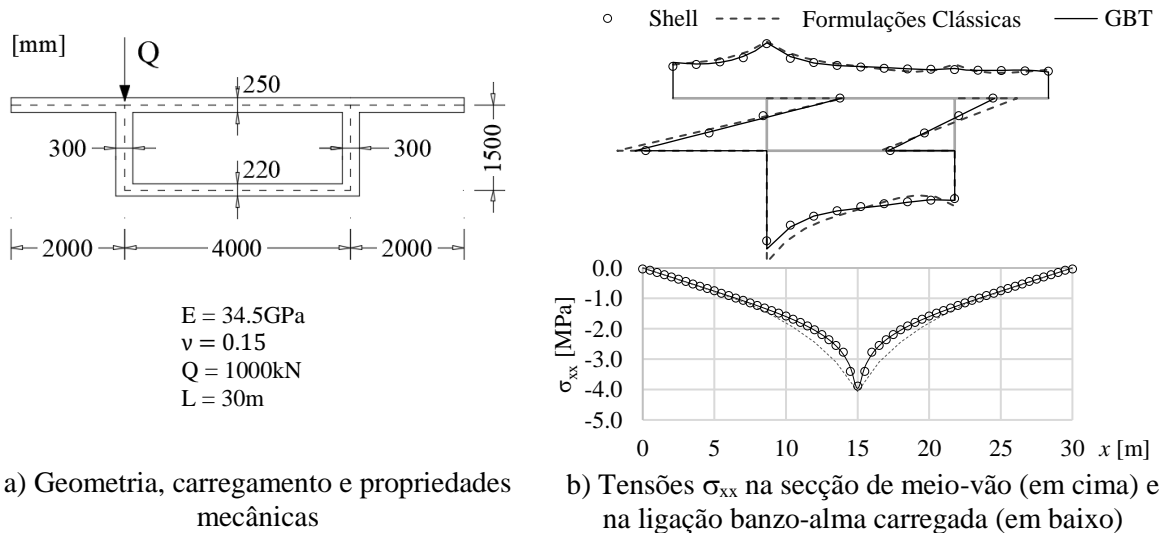


Fig. 3: Análise de um tabuleiro de BAP sujeito a uma carga concentrada excêntrica a meio-vão

Na Fig.4 apresentam-se as participações modais de *shear lag* e de torção/distorção (os diagramas de tensões de flexão não se apresentam porque são coincidentes). Para o caso do *shear lag* notam-se diferenças acentuadas entre os dois métodos e uma participação relevante da parcela antissimétrica. Em termos da torção, observa-se uma concordância quase total, enquanto que para a distorção a GBT conduz a tensões geralmente inferiores ao longo do vão.

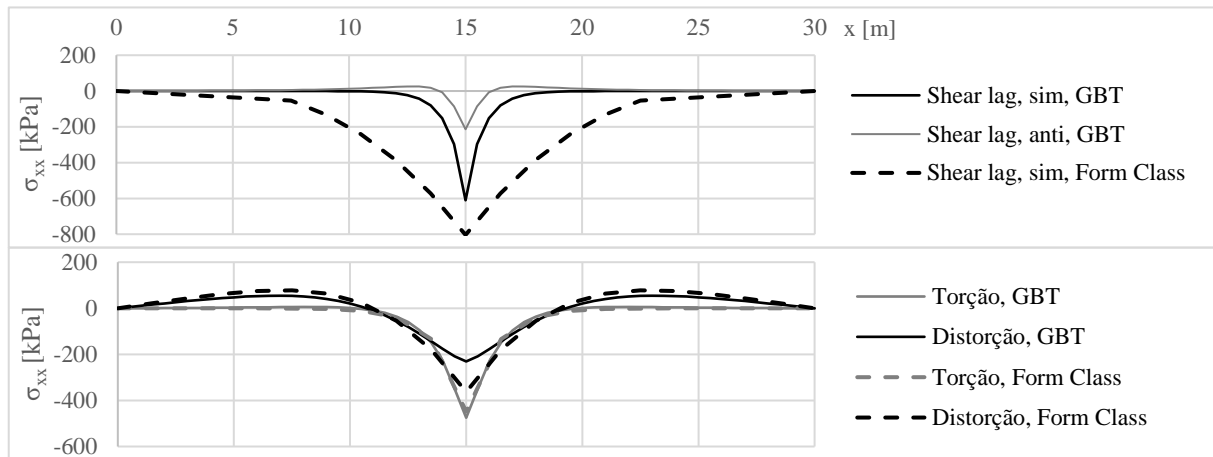


Fig. 4: Comparação das participações modais nas tensões longitudinais σ_{xx} obtidas através das Formulações Clássicas e da GBT

4.3.2 Exemplo numérico 2

O segundo caso consiste num tabuleiro misto aço-betão em caixão (ver Fig. 5a), com um vão simplesmente apoiado de 36 m, sujeito ao carregamento distribuído do Modelo de Carga LM1 definido na NP EN 1991-2 para pontes rodoviárias. São analisadas duas configurações de diafragmas, respetivamente afastados de 7.2 m e 12 m.

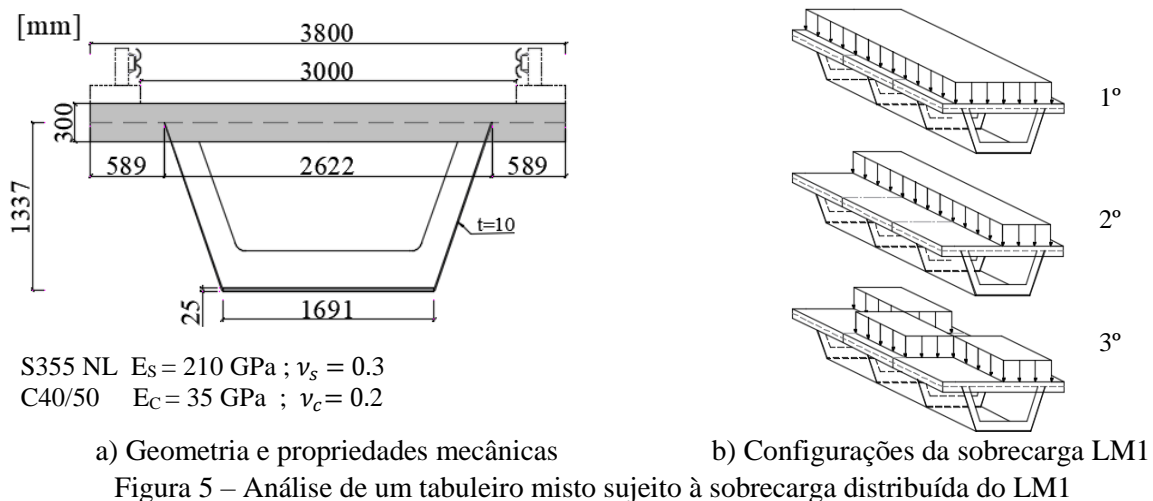


Figura 5 – Análise de um tabuleiro misto sujeito à sobrecarga distribuída do LM1

Em termos das verificações globais, a NP EN 1991-2 indica que as cargas distribuídas do LM1 devem ser aplicadas apenas nas partes desfavoráveis da superfície de influência, tanto longitudinal como transversalmente. Naturalmente, ao considerar a *notional lane* totalmente carregada obtêm-se as máximas tensões de flexão. Contudo, esta situação produz tensões longitudinais de torção e distorção nulas, dado que o carregamento está centrado com o eixo de simetria. São assim considerados os casos de carga 2 e 3 da Fig.5b, para maximizar os efeitos da torção e da distorção.

Obtém-se pela GBT a soma das tensões de torção e distorção na charneira de ligação banzo inferior-alma para estes casos de carga (ver Fig.6). As tensões de empenamento de torção são desprezáveis com exceção das zonas próximas de diafragmas. O comportamento torção+distorção na zona do meio-vão é portanto condicionado pela resposta distorcional, que é análoga ao de uma viga em fundação elástica. Infere-se por isso que é possível aproximar as tensões a meio-vão através de modelos equivalentes, bi-encastado (no caso 2) e simplesmente apoiado (no caso 3), com o vão correspondente à distância entre diafragmas (ver Fig.6).

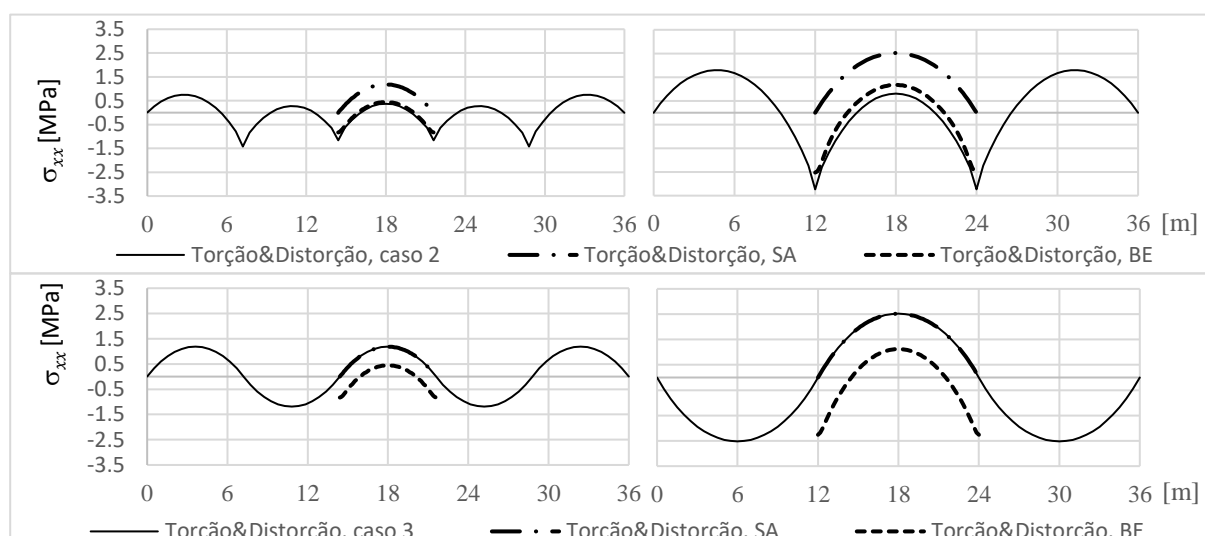


Figura 6 – Tensões longitudinais σ_{xx} devidas à torção e distorção nos casos de carga 2 e 3 com diafragmas espaçados de 7.2m (esquerda) e 12m (direita)

Como é expectável, quanto maior o número de diafragmas intermédios, mais preciso é o modelo bi-encastrado para o caso de carga 2. Já para o caso de carga 3, o modelo simplesmente apoiado é exato, por razões de simetria.

Em situações com diafragmas intermédios, a possibilidade de se utilizar estes modelos mais simples é especialmente interessante para a aplicação das Formulações Clássicas, dado que evita considerar o caso mais complexo de uma viga contínua em fundação elástica. Contudo, os resultados da Tabela 1 mostram que se obtêm majorantes das tensões a meio-vão.

Retomando a análise dos efeitos do carregamento distribuído, pode observar-se que (i) as tensões de flexão são mais significantes pelo que o caso de carga 1 é condicionante e (ii) apesar de não ser totalmente intuitivo, o terceiro caso de carga é bastante mais desfavorável que o caso de carga 2, pondo-se até a hipótese de ser condicionante na análise de pontes com tabuleiros mais largos e/ou mais deformáveis.

Tabela 1: Tensões máximas σ_{xx} a meio-vão para o nó de ligação banzo inferior-alma [MPa]

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		
	Flex.	Flex.	Torç.&Dist.		Flex.	Torç.&Dist.	
			Diaf. a 7.2m	Diaf. a 12m		Diaf. a 7.2m	Diaf. a 12m
GBT (global)	63.8	31.9	0.38	0.81	31.9	1.19	2.52
GBT (SA/BE)	63.8	31.9	0.45	1.18	31.9	1.18	2.52
Form Class (SA/BE)	63.8	31.9	0.53	1.47	31.8	1.60	4.24

5. Conclusões

As principais conclusões do estudo comparativo apresentado são:

1. A definição dos modos de deformação é equivalente em ambas as abordagens para flexão, torção com empenamento e distorção, sendo que podem existir ligeiras diferenças em secções heterogéneas devido às simplificações adotadas nas regras de homogeneização das Formulações Clássicas. Já no caso do efeito do *shear lag*, as Formulações Clássicas compreendem apenas um único modo global simétrico, enquanto a GBT permite a consideração de mais modos simétricos e antissimétricos, o que melhora a aproximação deste efeito.

2. A formulação GBT conduz a equações semelhantes às das Formulações Clássicas, mas mais completas dado que consideram (i) vários efeitos de flexão na que são desprezados na anterior (ii) o acoplamento da torção, distorção e respetivos bi-cortes. Em consequência, para o exemplo 1 a GBT conduz a resultados mais próximos dos obtidos pelo modelo utilizando elementos finitos do tipo casca.
3. Para o exemplo 2, a natureza modal da GBT permite a identificação de três casos de cargas que contemplam as situações condicionante na análise: (i) tabuleiro totalmente carregado, (ii) tabuleiro carregado apenas num dos lados do plano de simetria, (iii) tabuleiro carregado de forma antissimétrica entre diafragmas. As tensões longitudinais devidas à distorção para este terceiro caso de carga são bastante superiores às obtidas para o segundo caso; as tensões mais elevadas ocorrem, contudo, para o caso de carga 1, devido à flexão.
4. As Formulações Clássicas permitem a obtenção de uma estimativa para as tensões longitudinais devidas a flexão com *shear lag*, torção com empenamento e bi-corte e distorção.
5. O método de elementos finitos baseado na Teoria Generalizada de Vigas demonstra grande potencial enquanto ferramenta para o dimensionamento, pois por um lado permite obter resultados precisos baseados numa formulação simples e abrangente, e por outro fornece as participações modais que contribuem para uma análise clara do comportamento estrutural.

Referências

- [1] Pedro, JJO. “Distorção em tabuleiros de pontes em caixão. Influência no comportamento longitudinal”, *Tese de Mestrado*, IST-UTL, 1995.
- [2] Benscoter, SU. “A theory of torsion bending for multicell beams”, *Journal of Applied Mechanics*, 21(1), 25-34, 1954.
- [3] Wright, RN, Abdel-Samed, SR, Robinson, AR. “BEF Analogy for Analysis of Box Girders”. *Journal of the Structural Division*, Vol 94, No ST 7, 1968.
- [4] Schlaich, J, Scheef, H. *Concrete Box-Girder Bridges*. Vol.1 IABSE, 1982.
- [5] B.S.I., *BS 5400 - Steel, concrete and composite bridges. Code of practice for design of steel bridges*, 2004.
- [6] Gonçalves, R, Camotim, D. “Steel-concrete composite bridge analysis using Generalised Beam Theory”, *Steel and Composite Structures*, 10(3), 223-243, 2010.
- [7] Fan, ZT, Helwig, TA. “Distortional Loads and Brace Forces in Steel Box Girders”. *Journal of Structural Engineering*, 128(6), 710-718, 2002.
- [8] Chen, YS, Yen, BT, *Analysis of Composite Box Girders*. Fritz Laboratory Reports, N°380-12, 1980.
- [9] Kollbrunner, CF, Basler, K. *Torsion in Structures*, Springer-Verlag, 1969.
- [10] Maisel, BI, Roll, F. *Methods of analysis and design of concrete box beams with side cantilevers*. Cement and Concrete Association, N° 42.494 Tech. Rpt., Londres, 1974.
- [11] Hetenyi, M. *Beams on elastic foundation: Theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*, 11th ed. The University of Michigan Press, 1979.
- [12] Gonçalves, R, Ritto-Corrêa, M, Camotim, D. “A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of generalized beam theory”. *Computational Mechanics*, 46(5), 759-781, 2010.
- [13] Gonçalves, R, Bebiano, R, Camotim, D. “On the Shear Deformation Modes in the Framework of Generalised Beam Theory”. *Thin-Walled Structures*, 84, 325–334, 2014.
- [14] Bebiano, R, Gonçalves, R, Camotim, D. “A cross-section analysis procedure to rationalise and automate the performance of GBT-based structural analyses”. *Thin-Walled Structures*, 92, 29–47, 2015.
- [15] Bathe, KJ. ADINA System. ADINA R&D Inc., 2016.